*

Indre etisk verdi.

Det preferanslogiske systemet AX0 og noen beslektede kalkyler.

*

Morten Rognes

1997

*

§1 Det preferanselogiske systemet AX0.[1]

Vi skal undersøke et temmelig enkelt preferanselogisk system som her vil bli kalt for AX0. Prefikset "AX" er ment å skulle minne en om at det dreier seg om en logikk for setninger av typen "Den indre etiske verdi til det at F er større enn den indre etiske verdi til det forhold at G" og "Den indre etiske verdi til det forhold at F er like stor som den indre etiske verdi til det forhold at G". En slik logikk kunne man også kalle for en "aksiologisk logikk".

Språket til AX0, som vi her betegner med "L", er som følger: Det inneholder: (i) en tellbart uendelig mengde med setningsvariabler: p1, p2, p3,..... (ii) de setningslogiske konnektivene : ¬, –>, (iii) det unære formeldannende konnektivet: Nec , (iv) de to binære formeldannende konnektivene: Si og LSi, (v) parantestegnene (,).

De velformede formlene i systemet er dannet etter de følgende to regler:

(a) Er P en setningsvariabel er P en velformet formel.
(b) Er F og G to velformede formler så er også (¬F), (F–>G), Nec(F), Si(F,G) og LSi(F,G) velformede formler.

Formler av typen "Nec(F)" er det meningen at skal leses "Det er logisk nødvendig at F". Formler av typen "Si(F,G)" og "LSi(F,G)" er det meningen at skal kunne leses som henholdsvis: "Den indre etiske verdi til det at F er større enn den indre etiske verdi til det forhold at G" og "Den indre etiske verdi til det forhold at F er like stor som den indre etiske verdi til det forhold at G".

Vi introduserer konnektivene Pos, &, v, <–> ved den følgende definisjon:

Definisjon 1.1(i) Pos(F) <–> ¬Nec(¬F)
(ii) FvG <–> (¬F)–>G
(iii) F&G <–> ¬((¬F)&(¬G))
(iv) (F <–>G) <–> ((F–>G) & (G–>F))

Aksiomene i AX0 faller i tre klasser: (a) Et vanlig standard aksiomsett for setningslogikk. (b) Et vanlig akiomsett for modalsystemet S5. (c) Et sett av aksiomer for konnektivene Si og LSi.

De setningslogiske aksiomene er alle instanser i L av de følgende skjemaer:

U1 F –> (G–> F)
U2 ((¬F) –>(¬G)) –> (G –> F)
U3 (F–>(G –>H)) –>((F–>G) –> (F –>H))

Aksiomene for modaloperatoren Nec, som står for logisk nødvendighet, er alle instanser i L av de følgende skjemaer:

M1 Nec(F) –> F
M2 Nec(F –>G) –> (Nec(F) –> Nec(G))

[1] I alt vesentlig er dette arbeidet basert på notater forfatteren gjorde i 1980-1981. Det ble imidlertid ikke da tid til å utarbeide og renskrive nedtegnelsene. De ble derfor liggende. Først i 1996 så jeg på dem og annet relatert stoff igjen og fikk tid til å renskrive det av dette stoffet som hadde med systemet AX0 å gjøre.

M3 Nec(F) –> Nec(Nec(F))
M4 (¬Nec(¬F)) –> Nec(¬Nec(¬F))

Aksiomene for Si og LSi er alle instanser av de følgende formler: [2]

A1 Si(F,G) & Si(G,H) –> Si(F,H)
A2 Si(F,G) –> ¬Si(G,F)
A3 ¬Si(F,F)
A4 LSi(F,G) & LSi(G,H) –> LSi(F,H)
A5 LSi(F,G) –> LSi(G,F)
A6 LSi(F,F)
A7 LSi(F,G) & Si(F,H) –> Si(G,H)
A8 LSi(F,G) & Si(H,F) –> Si(H,F)
A9 Si(F,G) v LSi(F,G) v Si(G,F)
A10 Nec(F <–>G) –> (Si(F,H)<–> Si(G,H))
A11 Nec(F <–>G) –> (Si(H,F)<–> Si(H,G))
A12 Nec(F <–>G) –> (LSi(F,H)<–> LSi(G,H))
A13 Nec(F <–>G) –> (LSi(H,F)<–> LSi(H,G))

Dermed har vi presist avgrenset klassen av alle de formler i L som er aksiomer i systemet AX0.

Slutningsreglene i AX0 kan angis på den følgende måte i det vi bruker "Th(F)" som forkortelse for "F er et teorem":

R1 Modus ponens: Th(F) & Th(F–>G) –> Th(G)
R2 Modal generalisering: Th(F) –> Th(Nec(F))

Klassen av teoremer i AX0 er den minste mengden av formler i L som inkluderer alle aksiomene i AX0 og som dessuten er lukket under modus ponens og modal generalisering.

§2 Modellteori for AX0.

Den neste oppgaven er å formulere en modellteori for systemet AX0. I denne forbindelse skal vi først gjøre rede for hva vi her vil forstå med en verdiskala over en mengde X, en modellstruktur, en L-valuasjon over en modellstruktur og en L-modell.

Vi forklarer først hva som menes med en verdiskala over en mengde X. Med dette mener vi rett og slett en hvilken som helst funksjon som avbilder elementene i X inn i mengden av de reelle tall, med andre ord en funksjon f der man har at f: X –> Reell.

Vi tar dernest for oss uttrykket "modellstruktur":

Definisjon 2.1 Med en modellstruktur forstår vi en struktur

S=<W, <f(w)>/wêW/>

der komponentene oppfyller de følgende to krav:

(i) W≠ø
(ii) For alle wêW er f(w) en funksjon der man har f(w) : Pt(W) –>Reell. Dette innebærer som man skjønner at <f(w)>/wêI/ er en familie av

[2] Vi påstår ikke at alle aksiomskjemaene i dette settet er uavhengige av hverandre. Heller ikke fremsetter vi noen påstand om at det er den enkleste eller mest elegante aksiomatiseringen av den logikken som avgrenses semantisk nedenfor.

verdiskalaer over Pt(W) indeksert på W.
Vi bruker "MS(x)" som forkortelse for "x er en modellstruktur".

Det kan bemerkes at Mg(x: MS(x)) er en ekte mengde. Den er så og si "for stor" til å kunne eksistere i det kumulative mengdehierarkiet. Vi minner også om at dersom S=<W, <f(w)>/wêW/> så er (S);2(w) = f(w) for alle wêW.

Hva som menes med en L-valuasjon over en modellstruktur og hva som menes med en L-modell er forklart i denne definisjonen:

Definisjon 2.2 La S= <W, <f(w)>/wêW/> være en modellstruktur.

(i) Med en L-valuasjon over S forstår vi en funksjon V som til hver setningsvariabel p i L tilordner denne en delmengde av W.
Dette innebærer at en L-valuasjon over S er en funksjon som tilordner alle setningsbokstavene i L delmengder av W.

(ii) En L-modell er et triple M=<W, <f(w)>/wêW/,V> der S=<W, <f(w)>/wêW/> er en modellstruktur og V en L-valuasjon over modellstrukturen S. Vi bruker "Mod(L,x)" som forkortelse for uttrykket "x er en L-modell".

Også i forbindelse med denne definisjonen kan det bemerkes at Mg(x: Mod(L,x)) er en såkalt "ekte mengde".

Vi går nå over til å forklare hva som menes med at en formel F er sann ved indekspunktet w i modellen M relativt til L. La oss da aller først bemerke at vi betegner mengden av setningsvariabler i språket L med "Var(L)" Dette gjøres ved den følgende definisjon:

Definisjon 2.3 La M være en L-modell der M=<W, <f(w)>/wêW/,V>. Vi definerer da uttrykket "True(F,w,M,L)", som leses "Formelen F er sann ved indekspunktet w i modellen M relativt til L", ved den følgende induktive definisjon på lengden av formler i L:

(i) Er FêVar(L) –> (True(F,w,M,L) <–> wêV(F))

(ii) Er F=(¬G) der GêFm(L) har man at:
True(F,w,M,L) <–> ¬True(G,w,M,L)

(iii) Er F=(G–>H) der G,HêFm(L) har man at:
True(F,w,M,L) <–> (True(G,w,M,L) –>True(H,w,M,L))

(iv) Er F= Nec(G) der GêFm(L) har man at:
True(F,w,M,L) <–> (Ay)(yêW –> True(G,y,M,L))

(v) Er F= Si(G,H) der G;HêFm(L) har man at:
True(F,w,M,L) <–> f(w)(x1)> f(w)(x2) hvor:
x1 = Mg(w: True(G,w,M,L)) og
x2 = Mg(w: True(H,w,M,L))

(vi) Er F= LSi(G,H) der G;HêFm(L) har man at:
True(F,w,M,L) <–> f(w)(x1)=f(w)(x2) hvor:
x1 = Mg(w: True(G,w,M,L)) og
x2 = Mg(w: True(H,w,M,L))

Merk at vi sløyfer språkparameteren "L" i "True(F,w,M,L) " og skriver i stedet "True(F,w,M)" når det går klart frem av konteksten hvilket språk det er vi har i tankene.

Sannhetsmengden til en formel F i språket L med hensyn på modellen M er definert

på den følgende måte:

Definisjon 2.4 Er M=<W, <f(w)>/wêW/,V> en L-modell og FêFm(L) setter vi:
Sm;<L,M>(F) = Mg(w: True(F,w,M,L))

Vi kaller Sm;<L,M>(F) for sannhetsmengden til formelen F i L med hensyn på modellen M. Som man ser er dette klassen av alle de w i modellen M hvor vi har at F er sann. Når det er klart hvilket språk det er vi betrakter vil vi sløyfe språkparameteren "L" i uttrykket "Sm;<L,M>(F)" og i stedet bare skrive: "Sm;M(F)".

Den neste definisjonen introduserer termen "AX0-modell":

Definisjon 2.5 Er M=<W, <R;w>/wêW/,V> en L-modell så er M en AX0-modell og omvendt. Klassen av AX0-modeller er identisk med klassen av L-modeller, dvs. alle modeller for språket L

Tilslutt definerer vi AX0-gyldighet til en formel F ved den følgende definisjon.

Definisjon 2.6 En formel F er AX0-gyldig, i symboler "Val;AX0(F)", hvis og bare hvis den oppfyller de følgende krav:

(i) FêFm(L)
(ii) (AM)(Aw)(AX0Mod(M) & wê(M);1 –> True(F,w,M,L))[3]

Vi har nå gitt en eksplisitt redegjørelse for de begreper i modellteorien for AX0 som vi trenger her.

Det er nå ikke vanskelig å vise at gyldighetsteoremet gjelder for AX0. Man kan formulere dette slik om man bruker "Th(S,F)" som forkortelse for "Formelen F er et teorem i systemet S":

Teorem 2.7 Er FêFm(L) –> (Th(AX0, F) –> Val;AX0(F))

Beviset for dette er svært rutinepreget. Av plasshensyn gir vi det ikke i detalj, men overlater oppgaven til leseren. Man verifiserer først at alle AX0-aksiomene er AX0-gyldige og dernest at slutningsreglene R1 og R2 bevarer gyldighet. I det neste avsnittet vil vi også vise at det omvendte holder: Er en formel AX0-gyldig er den også et teorem i AX0.

§2.1 Relaterte kalkyler: AX1

Man kan betrakte den kalkylen man får når man legger til følgende skjema som et nytt aksiom til AX0:

(A14) LSi(Fv¬F, G&¬G)

Dette skjemaet sier at det tautologiske og det kontradiktoriske utsagn beskriver saksforhold som har akkurat den samme indre etiske verdi. Det er lett å vise at dette skjemaet er uavhengig av AX0. Begrenser man seg til de AX0-modeller <W,<f(w)>/wêW/,V> for L der man har at f(w)(W)=f(w)(ø)=0 vil skjemaet (+) være gyldig i alle slike modeller.

---

[3] Er X et n-tuple betegner (X);k den k'te komponenten i tuplet. Siden en AX0-modell M er et triple betegner derfor uttrykket (M);1 den første komponenten i triplet; det som man intuitivt kunne kalle klassen av de mulige verdenene i modellen.

Tenker man seg at det utsagnet som uttrykkes av en setning av typen Fv¬F beskriver et forhold som er nøytralt når det gjelder indre etisk verdi i seg selv, virker det ikke urimelig å definere "Pos(F)" og "Neg(F)", som man kunne forslå å lese som henholdsvis "Det at F er noe som har positiv indre etisk verdi i seg selv" og "Det at F er noe som har negativ indre etisk verdi i seg selv" ved:

Definisjon 2.1.1 (i) Pos(F) <–> Pr(F, Gv¬G)
(ii) Neg(F) <–> Pr(Gv¬G,F)

Man kunne også definere "Neu(F)", "Det at F beskriver et et forhold som er nøytralt med hensyn på indre etisk verdi" ved:

Definisjon 2.1.2 (i) Neu(F) <–> LSi(F,Gv¬G)

Kaller man kalkylen AX0 utvidet med A14 for AX1 og forutsetter man definisjonene (1) – (3) gjelder den følgende sats:

Teorem 2.1.3 De følgende formler er teoremer i AX1:

(i) Pos(F) v Neu(F) v Neg(F)
(ii) ¬(Pos(F) &Neu(F))
(iii) ¬(Neu(F) & Neg(F))
(iv) ¬(Pos(F) & Neg(F))
(v) Nec(F<–>G) –> (Pos(F) <–> Pos(G))
(vi) Nec(F<–>G) –> (Neu(F) <–> Neu(G))
(vii) Nec(F<–>G) –> (Neg(F) <–> Neg(G))
(viii) Nec(F) –> Neu(F)
(ix) Nec(¬F) –> Neu(F)
(x) Neu(F) & Neu(G) –> LSi(F,G)
(xi) Si(F,G) & Neu(G) –> Pos(F)
(xii) Si(F,G) & Pos(G) –> Pos(F)
(xiii) Neu(F) & Si(F,G) –> Neg(F)
(xiv) Si(F,G) & Neg(F) –> Neg(G)

I språket L er det mulig å iterere operatorene Si og LSi så meget man vil. Det er imidlertid mulig å legge til de følgende to aksiomskjemaer til AX0 og AX1:

(A15) Nec(Si(F,G)) v Nec(¬Si(F,G))
(A16) Nec(LSi(F,G)) v Nec(¬LSi(F,G))

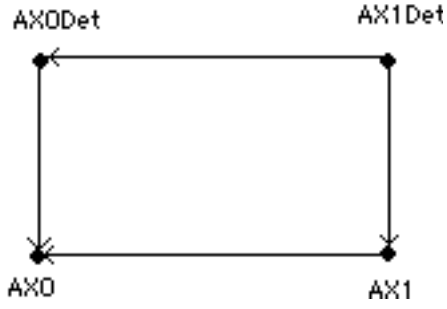
Som man ser uttrykker A15 at det enten er logisk nødvendig at det at F har større indre etisk verdi enn det at G eller at det er logisk nødvendig at det ikke er slik at det at F har større indre etisk verdi enn det at G. Dette innebærer at enhver setning av formen Si(F,G) enten er et logisk nødvendig sant utsagn eller et kontradiktorisk utsagn.

Tilsvarende ser man at A15 uttrykker at det enten er logisk nødvendig at det at F har like stor indre etisk verdi som det at G eller at det er logisk nødvendig at det ikke er slik at det at F har like stor indre etisk verdi som det at G. Dette innebærer at enhver setning av formen LSi(F,G) enten er et logisk nødvendig sant utsagn eller et kontradiktorisk utsagn.

Vi kaller det preferanselogiske systemet man får når A15 og A16 legges til AX0 som

nye aksiomskjemaer for AX0Det. Tilsvarende kalles det systemet man får når AX1 utvides med A15 og A16 for AX1Det. Det er lett å se at teoremene i AX0 er inkludert blandt teoremene i AX0Det og AX1. Videre er det klart at teoremene i de to sistnevnte systemer er inkludert blandt teoremene i AX1Det. Det skulle også være klart at alle disse inklusjonene er strenge. Den følgende figur gir en oversikt over disse inklusjonsforholdene:

Figur 1



§2.2 Modellteori for systemene AX1, AX0Det og AX1Det.

Vi har tidligere definert hva som menes med sannhet i en L-modell. Dette begrepet behøver vi ikke å endre på i forbindelse med de nye systemene AX1, AX0Det og AX1Det. Derimot skal vi innenfor klassen av AX0-modeller (som er det samme som L-modeller) avgrense visse underklasser som i en hvis forstand svarer til de nevnte systemer. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 2.2.1 (i) Er M=<W, <f(w)>/wêW/,V> en L-modell så er M en AX1-modell hvis og bare hvis modellen oppfyller det følgende krav:

(K1) (Aw)(wêW –> f(w)(W)= f(w)(ø)=0)

Vi bruker uttrykket "AX1Mod(x)" som forkortelse for uttrykket: "x er en AX1-modell".

(ii) Er M=<W, <f(w)>/wêW/,V> en L-modell så er M en AX0Det-modell hvis og bare hvis modellen oppfyller det følgende krav:

(K2) (Aw;1)(Aw;2)(w;1,w;2êW –> f(w;1)=f(w;2))

Vi bruker uttrykket "AX0DetMod(x)" som forkortelse for uttrykket: "x er en AX0Det-modell".

(iii) Er M=<W, <f(w)>/wêW/,V> en L-modell så er M en AX1Det-modell hvis og bare hvis modellen oppfyller de følgende to krav:

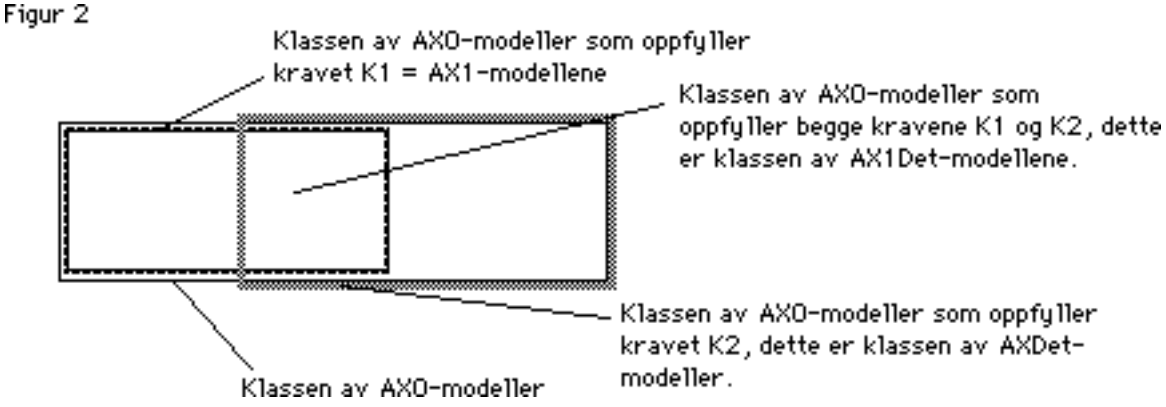
(K1) (Aw)(wêW –> f(w)(W)= f(w)(ø)=0)

(K2) (Aw;1)(Aw;2)(w;1,w;2êW –> f(w;1)=f(w;2))

Vi bruker uttrykket "AX1DetMod(x)" som forkortelse for uttrykket: "x er en AX1Det-modell".

Forholdet mellom disse modellklassene kan anskueliggjøres ved den følgende figur:

Figur 2



I forbindelse med disse modellklassene definerer vi også korresponderende gyldighetsbegreper:

Definisjon 2.2.2 (i) En formel F er AX1-gyldig, i symboler "Val;AX1(F)", hvis og bare hvis den oppfyller de følgende krav:

(1) FêFm(L)
(2) (AM)(Aw)(AX1Mod(M) & wê(M);1 –> True(F,w,M,L))

(ii) En formel F er AX0Det-gyldig, i symboler "Val;AX0Det(F)", hvis og bare hvis den oppfyller de følgende krav:

(1) FêFm(L)
(2) (AM)(Aw)(AX0DetMod(M) & wê(M);1 –> True(F,w,M,L))

(i) En formel F er AX1Det-gyldig, i symboler "Val;AX1Det(F)", hvis og bare hvis den oppfyller de følgende krav:

(1) FêFm(L)
(2) (AM)(Aw)(AX1DetMod(M) & wê(M);1 –> True(F,w,M,L))

Det er nå ikke vanskelig å vise at gyldighetsteoremet gjelder for AX1,AX0Det og AX1Det. Man kan formulere dette slik om man bruker "Th(S,F)" som forkortelse for "Formelen F er et teorem i systemet S":

Teorem 2.2.3 (i) Er FêFm(L) –> (Th(AX1, F) –> Val;AX1(F))
(ii) Er FêFm(L) –> (Th(AX0Det, F) –> Val;AX0Det(F))
(iii) Er FêFm(L) –> (Th(AX1Det, F) –> Val;AX1Det(F))

Beviset for dette er svært rutinepreget. Av samme grunn som ved AX0 gir vi det ikke i detalj, men overlater oppgaven til leseren.

§3 En sats om lineære ordninger.

Med en lineær relasjon forstås her en relasjon som er transitiv, asymmetrisk og total. Brukes uttrykket "Lin(R)" som forkortelse for "R er en lineær relasjon" kan man formulere en helt formell definisjon slik:

Definisjon 3.1 R er en lineær relasjon, Lin(R), hvis og bare hvis R oppfyller de følgende krav:

(i) Rel(R)

(ii) (Ax)(Ay)(Az)(xRy &yRz –> xRz)
(iii) (Ax)(Ay)(xRy –>¬(yRx))
(iv) (Ax)(Ay)(x,yêD(R) –> (xRy v x=y v yRx))

I det følgende betegner "Reell" klassen av de reelle tall. "<" betegner mindre-enn relasjonen mellom de reelle tallene. Målet i denne paragrafen er å gi et helt detaljert bevis for den følgende sats:

Teorem 3.1 Anta Lin(R) &D(R)≠ø & Cd(D(R))≤ Aleph;0 og cêReell. Da finnes en funksjon f som oppfyller følgende krav:
(i) f: D(R) –> Reell
(ii) f"D(R) Inkl (c –2, c+2)
(iii) (Ax)(Ay)(x,yêD(R) –> (f(x) > f(y) <–> xRy))

Som man ser innebærer forutsetningene at R er en lineær relasjon der domenet til relajonen har et kardinaltall som er mindre eller lik det første uendelige kardinaltall: Aleph;0. Sagt på en litt annen og mer forståelig måte skal domenet til relasjonen R i høyden være tellbart uendelig.

Bevis: Anta Lin(R) &D(R)≠ø & Cd(D(R))≤ Aleph;0 og aêReell. Siden D(R)≠ø finnes det noe a0 der a0êD(R). Vi setter S(a0) = Mg(b: bêD(R) & bRa0). Videre setter vi N(a0) = Mg(b: bê(R) &a0Rb). Siden R er en lineær ordning følger det da at S(a0)ΩN(a0)=ø og at D(R) = {a0}U S(a0)U N(a0). Siden D(R) er en høyest tellbart uendelig mengde må S(a0) og N(a0) også være det. Dette innebærer at vi kan finne en funksjon x som er slik at:

Cor(x) & Dom(x)≤Ô & Rgn(x) = S(a0)U{a0}

Videre må det da også være slik at vi kan finne en helt tilsvarende enummere-ring y av N(a0)U{a0} som er slik at:

Cor(y) & Dom(y)≤Ô & Rgn(y) = N(a0)U{a0}

Det skulle være klart at vi kan velge x og y slik at (1) x(0) =a0 = y(0).

Vi vil nå definere to funksjoner h og g som avbilder henholdsvis S(a0)U{a0} og N(a0)U{a0} inn i Reell. g er definert induktivt på følgende måte: (a) Vi setter g(x(0)) = c (b) Anta g(x(0)), ..., g(x(n)) allerede er definert for nêDom(x). Vi ønsker i så fall å definere g(x(n+1)). Det er nødvendig å sondre mellom to tilfeller:

Tilfelle (i): (Aj)(j≤n –> x(n+1)Rx(j)). I så fall setter vi :

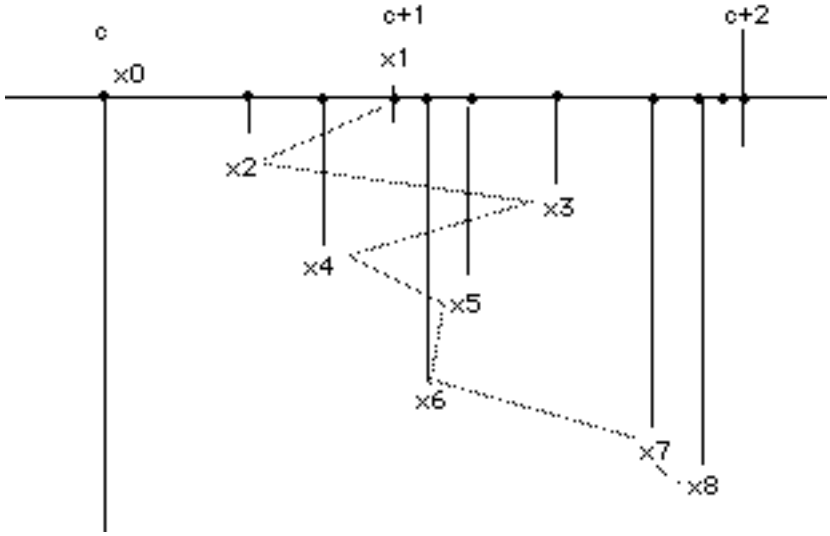
g(x(j+1)) = Max({g(x(0)),.....,g(x(n))}) + (1/2^n)

Tilfelle (ii): ¬(Aj)(j≤n –> x(n+1)Rx(j)). Da finnes det et j≤n hvor vi har at ¬x(n+1)Rx(j). Siden x(n+1)≠x(j) fordi x er en korrelasjon, må vi ha at x(j)Rx(n+1) der j≤n. Da må det finnes k og s der 0≤k,s≤n slik at x(k)Rx(n+)Rx(s) og hvor det ikke finnes noen p1,p2 der 0≤p1,p2≤n slik at x(k)Rx(p1)Rx(n+1) og x(n+1)Rx(p2)Rx(k). I dette tilfellet setter vi:

g(x(n+1)) = (1/2)*(g(x(k))+ g(x(s))

Dermed er g definert i alle tilfelle og for alle nêDom(x).

Figur 3



h defineres helt analogt i det vi setter h(y(0))=c og

h(y(n+1)) = Min(Mg(h(y(j)): j≤n))– (1/2^n)

om man har (Aj)(j≤n –> y(j)Ry(n+1)). Har man på den annen side at ¬ (Aj)(j≤n –> y(j)Ry(n+1)), ie. at y(n+1)Ry(j) for noe j≤n og y(t), y(s) er slik at y(t)Ry(n+1)Ry(s) (0≤ t,s≤n) og det ikke finnes u1,u2 der 0≤u1,u2≤n slik at y(t)Ry(u1)Ry(n+1) og y(n+1)Ry(u2)Ry(s) så setter vi:

h(y(n+1)) = (1/2)*(h(y(t))+h(y(s)))

Dermed er også h fullstendig definert.

Den funksjonen f vi trenger kan nå defineres ved å sette f =hUg. Det skulle da være klart at f: Dom(R) –> Reell & Func(f).

Det vi nå i tillegg må bevise er at:

(Ax)(Ay)(x,yêD(R) –> (xRy <–> f(x)>f(y))

La oss sette per definisjon:

F(n) <–> (Am)(n>m & x(n)Rx(m) –> g(x(n)) > g(x(m)) &
(Am)(m<n &x(m)Rx(n) –> g(x(m)) > g(x(n)).

Vi ønsker å bevise (An)F(n) ved induksjon på n. Anta derfor som induksjonshypotese:

IH1 (As)(s≤j –> F(s)). Målet er å bevise at F(j+1).

(a) Anta j+1>m & x(j+1)Rx(m)) for vilkårlig m. Vi skiller mellom to tilfeller:

Tilfelle (i): (As)(s≤j –> x(j+1)Rx(s)). Da har vi etter definisjonen ab g at g(x(j+1)) = Max(Mg(g(x(s)): s≤j)) + (1/2^j). Videre har man, siden j+1>m at j≥m. I dette tilfellet følger derfor g(x(m))êMg(g(x(s)): s≤j) og derfor at g(x(j+1))>g(x(m)).

Tilfelle (ii): Anta s≤j & ¬(x(j+1)Rx(m)) for noe s. Da har man at:
s≤j & x(m)Rx(j+1). Da finnes det et par x(t), x(k) der 0≤k,t≤j og hvor:

x(k)Rx(j+1)Rx(k) og hvor det heller ikke finnes k1,t1 der:
0≤k1,t1≤j og x(k)Rx(k1)Rx(j+1)Rx(t1)Rx(t). I dette tilfellet har man at g(x(j+1)) = (1/2)*(g(x(k))+g(x(t)). Nå har man x(j+1)Rx(m). Det følger at man enten har x(m)=x(t) eller x(t)Rx(m).

Undertilfelle (ii.1): Er x(m)=x(t) følger det at m=t≤j. Da har vi om k>t at g(x(k))>g(x(t)) ved hjelp av IH1. Da følger 2*g(x(t))<(g(x(k))+g(x(t))) og derfor at g(x(j+1))= (1/2)*(g(x(k))+g(x(t))) > g(x(t))= g(x(m)). Satsen holder derfor i dette tilfellet. Er k<t har man siden x(k)Rx(t) & k,t≤j igjen ved hjelp av induksjonshypotesen at g(x(k))> g(x(t)). Da følger:

g(x(j+1))= (1/2)*(g(x(k))+g(x(t))) > g(x(t))= g(x(m)). Er k=t har man x(t)=x(k), men det er umulig siden x(k)Rx(t) og R er en lineær relasjon. Påstanden holder derfor i dette undertilfelle.

Undertilfelle (ii.2): x(t)Rx(m). Siden t,m≤j har man ved hjelp av induksjonshypotesen at g(x(t))>g(x(m)). Nå er det også slik at k,t≤j. Derfor må vi også ha ved hjelp av induksjonshypotesen at g(x(k))> g(x(t)) siden x(k)Rx(t). Det følger at g(x(j+1))= (1/2)*(g(x(k))+g(x(t))) > g(x(t))= g(x(m)).

I alle tilfelle har vi g(x(j+1))>g(x(m)). Det følger at vi har bevist:

(1) (Am)(m> (j+1) & x(j+1)Rx(m) –> g(x(j+1))> g(x(m))).

Men vi må også bevise det følgende:

(2) (Am)(m< (j+1) & x(m)Rx(j+1) –> g(x(m))> g(x(j+1)))

Anta derfor at (+) m<(j+1) & x(m)Rx(j+1). På samme måte som ovenfor skiller vi mellom to tilfeller:

Tilfelle (i): (As)(s≤j –> x(j+1)Rx(s)). Siden m<(j+1) følger m≤j og derfor at x(j+1)Rx(m). Men dette strider åpenbart mot (+). Derfor er dette tilfellet utelukket.

Tilfelle (ii): Det finnes s der s≤j & ¬x(j+1)Rx(s). I så fall har man s≤j og x(s)Rx(j+1). Da må det finnes x(t),x(r) der 0≤t,r≤j hvor x(t)Rx(j+1)Rx(r) og hvor det dessuten er slik at det ikke finnes t1,r1 der 0≤t1,r1≤j og der:

x(t)Rx(t1)Rx(j+1)Rx(r1)Rx(r). Videre er det klart at vi i dette tilfelle, i lys av definisjonen av g må ha at:

g(x(j+1)) = (1/2)*(g(x(t))+ g(x(r))). Siden x(m)Rx(j+1) og x(t)Rx(j+1) har man enten at x(m)Rx(t) eller at x(m)=x(t). Siden t,r≤j har vi i lys av det forhold at x(t)Rx(r) at g(x(t))> g(x(r)) siden x(t)Rx(r).

Undertilfelle (ii.1): x(m)Rx(t). Siden m≤j og t≤j har man etter induksjons-hypotesen at g(x(m))> g(x(t)). Det følger at:

g(x(m))>(1/2)*(g(x(t))+ g(x(r))) =g(x(j+1))

Undertilfelle (ii.2): x(m)=x(t). Da har vi g(x(m))=g(x(t)) og siden g(x(t))>g(x(r)) har man da:

g(x(m)) = (1/2)*2*g(x(t)) >(1/2)*(g(x(t))+ g(x(r))) = g(x(j+1))

I begge tilfelle har man at g(x(m))> g(x(j+1)). Dermed har vi bevist (2). I kraft av beviset for (1) og (2) har vi godtgjort at F(j+1) under forutsetning av at (As)(s≤j –>F(s)). Det følger at:

(3) (An)F(n).

Fra (3) følger: (An)(Am)(x(n)Rx(m) –> g(x(n))>g(x(m)). Fra dette kan man så i sin tur slutte at:

(4) (Ax)(Ay)(x,yêS(a0)U{a0} & xRy. –> g(x)> g(y)).

La oss nå sette per definisjon:

C(n) <–>. (Am)(n>m & y(n)Ry(m). –> h(y(n))>h(y(m))) &
(Am)(m<n & y(m)Ry(n) –> h(y(m))> h(y(n)))

Vi ønsker å vise at (An)C(n). Vi gjør dette ved induksjon. Som induksjonshypotese antar vi:
IH2: (As)(s≤j –> C(j)). Dernest er målet å vise at C(j+1).

(a) Anta (j+1)>m og y(j+1)Ry(m) for vilkårlig m for å vise h(y(j+1))> h(y(m)). Vi skiller mellom to hovedtilfelle:

Tilfelle (i): (As)(s≤j –> y(s)Ry(j+1)). Man har m<(j+1) og derfor m≤j. Det følger at y(m)Ry(j+1). Dette strider mot vår antagelse om at y(j+1)Ry(m). Dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle (ii): Det finnes s der s≤j & ¬(y(s)Ry(j+1). Da følger s≤j og dessuten at y(j+1)Ry(s). Fra dette følger at det må finnes k,t der 0≤k,t≤j slik at y(k)Ry(j+1)Ry(t) og der det ikke kan finnes k1,t1 der 0≤k1,t1≤j slik at

y(k)Ry(k1)Ry(j+1)Ry(t1)Ry(t). Videre følger det at
h(y(j+1)) = (1/2)*(h(y(k))+ h(y(t))). Siden y(j+1)Ry(m) har vi enten y(t)=y(m) eller at y(t)Ry(m). Siden y(k)Ry(t) og k,t≤j følger ved hjelp av induksjonshypo-tesen IH2 at h(y(k))> h(y(t)).

Undertilfelle (ii.1): y(t) = y(m). Da har man at:
h(y(j+1)) = (1/2)*(h(y(k))+ h(y(t))) >h(y(t)) = h(y(m)) som er det vi ønsker.

Undertilfelle (ii.2): y(t)Ry(m). Siden m<(j+1) har vi m≤j. Det følger at m,t≤j. Ved hjelp av induksjonshypotesen kan man da utlede at h(y(t))>h(y(m)). Det følger i så fall at
h(y(j+1)) = (1/2)*(h(y(k))+ h(y(t))) >h(y(t)) > h(y(m)).

I begge tilfelle har man h(y(j+1))>h(y(m)). Vi har derfor bevist:

(5) (Am)((j+1)>m & y(j+1)Ry(m). –> g(y(j+1)) > g(y(m))).

(b) Anta på den annen side at m<(j+1) & y(m)Ry(j+1) for vilkårlig m. Igjen skiller vi mellom to hovedtilfeller:

Tilfelle (i): (As)(s≤j –> y(s)Ry(j+1)). Da har man i lys av definisjonen av h at
h(y(j+1)) = Min(Mg(h(y(s)): s≤j))–(1/2^j). Siden m≤j følger det at h(y(m))>h(y(j+1)).

Tilfelle (ii): ¬(As)(s≤j –> y(s)Ry(j+1)). Da finnes s≤j slik at ¬y(s)Ry(j+1). Det følger at s≤j & y(j+1)Ry(s). Da finnes y(k), y(t) der 0≤k,t≤j slik at
y(k)Ry(j+1)Ry(t) og der det ikke finnes k1,t1 hvor 0≤k1,t1≤j og man har
y(k)Ry(k1)Ry(j+1)Ry(t1)Ry(t). Det følger siden y(m)Ry(j+1) at man enten har y(m)=y(k) eller y(m)Ry(k). Siden y(k)Ry(t) og k,t≤j har vi etter induksjonshypotesen at h(y(k))>h(y(t)).

Undertilfelle (ii.1): y(m)=y(k). Vi må da ha:
h(y(j+1)) = (1/2)*(h(y(k))+h(y(t)))< h(y(k))=h(y(m)) som er det vi ønsker.

Undertilfelle (ii.2): y(m)Ry(k). Siden m,k≤j har vi etter induksjonshypotesen at h(y(m))>h(y(k)) og derfor at:
h(y(j+1)) = (1/2)*(h(y(k))+h(y(t)))< h(y(k))<h(y(m))
I alle tilfelle har man at h(y(m))> h(y(j+1)). Vi har derfor bevist siden m var vilkårlig at

(6) (Am)(m<(j+1) & y(m)Ry(j+1) –> h(y(m))>h(y(j+1))). Fra (5) og (6) følger altså C(j+1) om IH2 holder. Ved induksjon følger derfor:

(7) (An)C(n) og derfor:
(Am)(An)(y(n)Ry(m) –> h(y(n))>h(y(m))). Herav kan man slutte:

(8) (Ax)(Ay)(x,yêN(a0)U{a} –> (xRy –> h(x)> h(y))).

Det er nå nødvendig å bevise følgende:

(9) x(n)Ra0 –> g(x(n))>c for alle n>0

(10) a0Ry(n) –> h(y(n))<c for alle n>0

(11) g(x(0)) = h(x(0)) = c.

Her er (11) en umiddelbar konsekvens av definisjonene av funksjonene h og g. (9) og (10) bevises ved induksjon på n. Vi tar bare for oss (9) siden (10) bevises på akkurat den samme måten. Fra definisjonen av g ser man at (9) holder om n=1. Anta at (9) holder for alle s der 0<s≤n. Vi skal vise at den holder for n+1. Anta derfor x(n+1)Ra0. Man har åpenbart at x(n+1)≠x(n) siden Cor(x). Vi sondrer mellom to tilfeller:

Tilfelle (i): x(n+1)Rx(n). Da har vi i lys av (4) at g(x(n+1))>g(x(n)) og derfor, siden induksjonshypotesen er at g(x(n))>c , at g(x(n+1))>c.

Tilfelle (ii): x(n)Rx(n+1). I lys av definisjonen av g er det her nødvendig å sondre mellom to undertilfeller:

Undertilfelle (ii.1). (As)(s≤n –> x(n+1)Rx(s)). I dette tilfelle har man imidlertid at x(n+1)Rx(n) som er umulig i lys av vår antagelse om at x(n)Rx(n+1). Dette tilfellet er derfor utelukket.

Undertilfelle (ii.2). s≤n & x(s)Rx(n+1) for noe s. Da finnes et minste par x(k),x(t)

der x(k)Rx(n+1)Rx(t) og hvor 0≤k,t≤n. Er t=0 har vi g(x(t))=c. Ved hjelp av (3) har man da g(x(n+1))>g(x(t))=0 som er det vi ønsker. Er t>0 har vi at g(x(t))>c i lys av induksjonshypotesen fordi t≤n. I så fall har vi igjen ved hjelp av (3) at g(x(n+1))>g(x(t))>0. Dette viser at (9) holder.

Det gjenstår å gi bevis for to ting. Det første som må godtgjøres er:

(12) (Ax)(Ay)(x,yêD(R) –> (xRy <–> f(x)>f(y)))

Anta derfor at x,yêD(R) og xRy for vilkårlige x,y. Vi skiller mellom tre tilfeller:

Tilfelle (i): xêS(a0)U{a0} og yêN(a0). Da har vi at x=x(n) for noe n og y=y(m) for noe m der n,m≥0. Det følger da fra det vi viste ovenfor at g(x(n))≥c>h(y(m)). Det følger at f(x(n))> f(y(m)) og derfor at f(x)>f(y).

Tilfelle (ii): x,yêS(a0)U{a0}. Da har man at x=x(n) og y=x(m) for noe m,n≥0. Siden xRy følger x(n)Rx(m). I lys av (3) har man da at f(x)=g(x(n))>g(x(m))=f(y).

Tilfelle (iii): x,yêN(a0)U{a0}. Da har man at det finnes n,m≥0 slik at x=y(n) og y= y(m). Siden xRy følger y(n)Ry(m). Fra dette og (7) følger f(x)=h(y(n))>h(y(m))=f(y).

Vi har nå vist: (13) (Ax)(Ay)(x,yêD(R) –> (xRy –> f(x)>f(y))). Anta nå at x,yêD(R) og at ¬(xRy) for vilkårlige x,y. Da har man x=y v yRx. I det første tilfelle har man f(x)=f(y) og derfor åpenbart at ¬(f(x)>f(y)). I det andre tilfelle har man i lys av (13), som vi nå har bevist, at f(y)>f(x). Da er det åpenbart at ¬(f(x)>f(y)). Vi har dermed vist: (14) (Ax)(Ay)(x,yêD(R) & ¬(xRy). –> ¬(f(x)>f(y))). Fra (13) og (14) følger (12).

Det gjenstår å vise:

(15) f'D(R) Inkl (c–2,c+2)

Dette innebærer at (Ax)(xêD(R) –> c–2< f(x) < c+2). Nå har man at g(x(0))= c og at h(y(0))=c. Ved induksjon beviser man lett at:

(16) (An)(n>0 –> g(x(n)) ≤ c+ ∑/j,0,(n–1)/(1/2^j))

(17) (An)(n>0 –> h(y(n))≤ c – ∑/j,0,(n–1)/(1/2^j))

Fra (11), (16) og (17) følger (15) siden ∑/j,0,n/(1/2^j))<2 for alle n>0. Vi har dermed levert et fullstendig bevis for Teorem 3.1. **Q.E.D.**

Betrakter man beviset ovenfor ser man at vi har gitt bevis for den følgende litt sterkere sats:

Teorem 3.2 Anta Lin(R) &aêD(R) & Cd(D(R))≤ Aleph;0 og cêReell. Da finnes en funksjon f som oppfyller følgende krav:

(i) f: D(R) –> Reell

(ii) f(a) = c

(ii) f'D(R) Inkl (c –2, c+2)

(iii) (Ax)(Ay)(x,yêD(R) –> (f(x) > f(y) <–> xRy))

§4 Konstruksjon av maksimalt konsistente mengder. Kanoniske modeller.

Det er også mulig å løse fullstendighetsproblemet for logikken AX0 ved hjelp av vanlige metoder innenfor modallogikken. I dette avsnittet skal vi gjøre dette.

I det følgende antar vi at S er en eller annen logikk i språket L. Man kan f.eks. tenke seg at S er det systemet som fremkommer fra AX0 ved å fjerne aksiomene A1 –A13 slik at man bare sitter igjen med den modallogiske og setningslogiske del av systemet. Vi skal forutsette at modus ponens og modal generalisering er slutningsregler i systemet S.

For å gjennomføre fullstendighetsbeviset er det nødvendig å innføre en rekke

begrepsdannelser og gi bevis for en rekke hjelpesetninger. La oss på dette punkt gjøre oppmerksom på at det meste av det vi skal gjøre rede for her er standard- teknikker som overhodet ikke representerer noe nytt.

Anta F er en formel i L. Da kalles F for S-konsistent, der S er en logikk i L, hvis og bare hvis man har at ¬Th;S(¬F), med andre ord om det ikke er slik at negasjonen av F er et teorem i systemet S. Er Δ en mengde med formler i språket L sies Δ å være S-konsistent hvis og bare hvis det ikke finnes noen endelig rekke med formler F;1,....,F;kêΔ (k≥1) som er slik at Th;S(¬(F;1&...&F;k)). En mengde med formler Δ i L kalles for maksimalt S-konsistent hvis og bare hvis den er S-konsistent og det dessuten ikke finnes noen mer omfattende mengde av formler i L, la oss si Δ' som er S-konsistent og som strengt inkluderer Δ.

Det følgende teorem er helt sentralt i det følgende.

Teorem 4.1 (Lindenbaums lemma) Enhver S-konsistent mengde av formler Δ kan utvides til en maksimalt konsistent mengde med formler, dvs. Er Δ en S-konsistent mengde med formler i L finnes en maksimalt S-konsistent mengde Δ' med formler i L der man har Δ Inkl Δ'.

Bevis: Anta Δ er en S-konsistent mengde med formler i L. Anta F;0, F;1,....,F;n,.... er en enummerering av alle formlene i L. (Vi antar at L er et tellbart språk.) Definer nå induktivt en formelmengde Δ;k for kêNat på den følgende måte:

(i) Δ;0 = Δ

(ii) Δ;(k+1) = Δ;k om F;k er S-inkonsistent med Δ;k, dvs. om Δ;kU{F;k} er S-inkonsistent. Ellers er Δ;(k+1) = Δ;kU{F;k}

Vi setter Δ;∞ = UN/n,0,∞/(Δ;k). Man kan nå vise at (a) Δ Inkl Δ;∞. Dessuten kan man vise (b) at Δ;∞ er maksimalt S-konsistent. La oss først se på (a). Man har fra (i) at Δ Inkl Δ;0. Anta Δ Inkl Δ;k. Det er to muligheter når det gjelder Δ;(k+1). Enten har man at Δ;(k+1)=Δ;k. I så fall følger Δ Inkl Δ;(k+1). Eller så er Δ;(k+1) = Δ;kU{F;k}. Men også i dette tilfellet er Δ inkl Δ;(k+1). Fra dette følger ved induksjon at man har: (An)(nêNat –> Δ Inkl Δ;n). At Δ Inkl Δ;∞ innebærer per definisjon at (Ax)(xêΔ –> (En)(nêNat &n≥0 & xêΔ;n)). Dette følger imidlertid umiddelbart fra det vi nå nettopp har bevist.

La oss så se på (b). Fra definisjonen av Δ;k fremgår det umiddelbart at Δ;0 er konsistent. Dette er fordi Δ;0=Δ og Δ etter forutsetning er konsistent. Anta Δ;k er konsistent for vilkårlig k. Da ser man fra definisjonen at også Δ;(k+1) er konsistent. Anta nå for reduktio ad absurdum at Δ;∞ er S-inkonsistent. Da finnes det G;1,...,G;r êΔ;∞ slik at Th;S(¬(G;1&...&G;r)). La j være det minste naturlige tallet slik at {G;1,....,G;r} Inkl {F;0,....,F;j}. Da har vi at {G;1,...,G;r} Inkl Δ;j og derfor at Δ;j er inkonsistent. Men dette er umulig. Det følger at Δ;∞ er konsistent. Vi må imidlertid også vise at Δ;∞ er maksimalt konsistent. Anta for reduktio at Δ;∞ SInk H der H er en formelmengde i L og hvor H er konsistent. Da må det finnes en formel F slik at (1) FêH & ¬(FêΔ;∞). Siden F er en formel I L har man at F= F;k for noe k. Ved konstruksjonen av Δ;∞ må derfor F ha blitt puttet inn i Δ;(k+1) Inkl Δ;∞. Men da må FêΔ;∞. Dette strider klart mot (1). Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

S-maksimalt konsistente mengder har visse viktige egenskaper. Endel av disse er sammenfattet i det følgende teorem:

Teorem 4.2 Er Δ en S-maksimalt konsistent mengde av formler i L har man at følgende

gjelder om F,G er formler i L:

(i) Fê∆ v (¬F)ê∆
(ii) Th;S(F) –> Fê∆
(iii) Fê∆ & (F–>G)ê∆ –> Gê∆
(iv) ¬(EG)(GêFm(L) & Gê∆ & (¬G)ê∆)

Bevis: (i) Anta for reduktio ad absurdum at ¬(Fê∆) og ¬((¬F)ê∆). Siden ∆ er maksimal må da ∆U{F} og ∆U{¬F} være inkonsistente. Dette innebærer at det finnes formler d1,....,dnê∆ slik at (1) Th;S(¬(d1&....&dn&F)). Videre må det finnes visse formler e1,...,emê∆ slik at (2) Th;S(¬(e1&...&em&¬F)). Fra (1) og (2) følger imidlertid:

(3) Th;S: d1&...&dn –> ¬F
(4) Th;S: e1&...&em –>F

Fra disse to ting følger så Th;S(¬(d1&...&dn&e1&...&em)). Men dette innebærer at ∆ er S-inkonsistent, noe som er umulig.

(ii) Anta for reduktio ad absurdum at Th;S(F) og ¬(Fê∆). Det siste, og det vi viste under punkt (i), impliserer at (¬F)ê∆. Men dette og Th;S(F) innebærer at ∆ er S-inkonsistent. Dette er umulig.

(iii) Anta for reduktio ad absurdum at F,G er formler i L der man har Fê∆ & (F–>G)ê∆ & ¬(Gê∆). Den siste konjunkten impliserer i lys av resultatet under (i) at (¬G)ê∆. Det følger at vi har {F,F–>G, ¬G} Inkl ∆. Men nå har man Th;S(¬(F&F–>G &¬G)). Dette har som konsekvens at ∆ er inkonsistent ,noe som er umulig.

(iv) Anta Gê∆ & (¬G)ê∆ for en eller annen formel G. Siden Th;S(¬(G&¬G)). Følger da at ∆ er inkonsistent. Som i de andre tilfellene ser man at dette er helt umulig siden ∆ etter forutsetningen skal være maksimalt konsistent.

Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Vi skal i det følgende forutsette at S er logikken AX0 eller en utvidelse av denne med nye aksiomskjemaer. Dette innebærer at S nå inneholder alle aksiomskjemaene setningslogikken og for modalsystemet S5 i L, dvs. skjemaene M1 – M4 ovenfor. Vi lar W' betegne klassen av alle S-maksimalt konsistente mengder i L. Vi definerer så en relasjon R over W' ved å sette:

R = Mg(<w;1,w;2>: w;1,w;2êW' & (AF)(FêFm(L &Nec(F)êw;1 –> Fêw;2))

La oss bevise:

Teorem 4.3 Anta R og W' er definert som angitt ovenfor. Da gjelder ar R er en ekvivalensrelasjon over W'

Bevis: Anta w er et vilkårlig element i W'. Vi ønsker å vise at wRw. I lys av definisjonen av R er det da tilstrekkelig å bevise at Fêw så sant Nec(F)êw for alle formler F i L. Nå har man at Th;S(Nec(F) –> F) siden M1 inngår som aksiom i S. Fra dette og det forrige teoremet kan man da slutte at (Nec(F) –> F)êw. Men er da Nec(F)êw kan vi fra Teorem 4.2 slutte at også Fêw. Dette viser at F er refleksiv. Det er nødvendig å vise at R er transitiv. Anta derfor at w;1Rw;2 og at w;2Rw;3. I lys av definisjonen av R innebærer dette at:

(1) (AF)(FêFm(L &Nec(F)êw;1 –> Fêw;2) og
(2) (AF)(FêFm(L &Nec(F)êw;2 –> Fêw;3)

Anta nå F er en vilkårlig formel i L der vi har (3) Nec(F)êw;1. Nå har vi Th;S(Nec(F) –> Nec(Nec(F))). Dette innebærer i lys av Teorem 4.2 at

(Nec(F) –> Nec(Nec(F)))êw;1. Sammen med (3) impliserer dette at Nec(Nec(F))êw;1. Dette og (1) impliserer Nec(F)êw;2. I sin tur impliserer dette sammen med (2) at Fêw;3. Vi har derfor vist:

(AF)(FêFm(L &Nec(F)êw;1 –> Fêw;3) I lys av definisjonen av R må vi da ha w;1Rw;3.

Det er også nødvendig å vise at R er symmetrisk. Anta derfor w;1Rw;2. I følge definisjonen av R innebærer dette:

(4) (AF)(FêFm(L &Nec(F)êw;1 –> Fêw;2) Nå har vi at

¬Nec(F) –> Nec(¬Nec(F)) er et teorem i S. Anta for reduktio ad absurdum at (5) Nec(F)êw;2 og at ¬(Fêw;1) for en eller annen formel F i L. Fra det siste og foregående teorem følger at (6) (¬F)êw;1. Siden ¬F –> ¬Nec(F) er et teorem i S har man at (¬F –> ¬Nec(F))êw;1. Dette og (6) innebærer at (¬Nec(F))êw;1. Men siden ¬Nec(F) –> Nec(¬Nec(F)) er et teorem i S har vi
Nec(¬Nec(F))êw;1. Dette og (4) impliserer (¬Nec(F))êw;2. Men dette strider åpenbart mot (5). Dette viser at R også er symmetrisk. **Q.E.D.**

Teorem 4.4 Anta R og W' er definert som angitt ovenfor. Anta F,G er vilkårlige formler i L og at wêW'. Da gjelder de følgende påstander:

(i) Fêw &Gêw <–> (F&G)êw
(ii) (¬F)êw <–> ¬(Fêw)
(iii) (F–>G)êw <–> (Fêw –> Gêw)
(iv) (F<–>G)êw <–> (Fêw <–> Gêw)
(v) (F v G)êw <–> (Fêw v Gêw)
(vi) Nec(F)êw <–> (Aw')(w'êW' & wRw' –> Fêw')
(vii) Pos(F)êw <–> (Ew')(wRw' & fêw')

Bevis: De fem første punktene i dette teoremet kan lett bevises ved hjelp av Teorem 4.2. Vi tar bare for oss (i) som et eksempel og overlater (ii) – (v) til leseren. Anta Fêw & Gêw. Nå har man Th;S(F –>G–>(F&G)). Dette er jo et enkelt teorem i setningslogikken. Fra dette følger ved hjelp av Teorem 4.2 (iii) at (G –> F&G)êw i lys av at Fêw. Siden G og så er et element i w følger (F&G)êw.

La oss så se på (vi). Anta (1) Nec(F)êw & (2) wRw' for vilkårlig w'. Fra (2) og definisjonen av R følger (AG)(Nec(G)êw –> Gêw'). Fra dette og (1) har man åpenbart at Fêw'.

Anta på den annen side at (3) (Aw')(w'êW' &wRw' –> Fêw'). Anta for reduktio ad absurdum at (4) ¬(Nec(F)êw). Siden w er en S-maksimalt konsistent mengde følger da (¬Nec(F))êw. Men siden Th;S(¬Nec(F) –>Pos(¬F)) kan vi videre slutte at (5) Pos(¬F)êw i lys av egenskapene til maksimalt konsistente utsagn. Definer nå en formelmengde Q ved å sette:

(6) Q = {¬F} U Mg(G: Nec(G)êw)

Anta for reduktio ad absurdum at Q er S-inkonsistent. Da vil det finnes H;0,...,H;nêFm(L) slik at (7) Th;S(¬(H;0&.....&H;n)). Vi kan anta at (¬F)=H;0 for er alle H'ene med i Mg(G: Nec(G)êw) følger fra (7) at

(8) Th;S(¬((¬F)& H;0&....& H;n)). Vi har derfor at

(9) Th;S(H;1&.....&H;n –> ¬(¬F)) Dette er ekvivalent med:

(10) Th;S(H;1&....&H;n –> F) Fra dette, aksiomene og slutningsreglene i S utleder man lett:

(11) Th;S(Nec(H;1)&...&Nec(H;n) –> Nec(F)). Fra det faktum at H;1,...H;nêMg(G: Nec(G)êw) følger at

(12) Nec(H;1)êw &....& Nec(H;n)êw. Dette og (11) impliserer Nec(F)êw som åpenbart strider mot (4). Det følger at Q er konsistent. Ved hjelp av Lindenbaums lemma kan da Q utvides til en S-maksimalt konsistent mengde w'. Det er da klart at at man har (13) (¬F)êw' og at (AF)(FêFm(L)&Nec(F)êw–>Fêw'). Dette innebærer at wRw'. Men fra dette og (3) følger Fêw' som åpenbart strider mot (13). Dette viser at det er umulig å anta både (3) og (4). Man kan derfor konkludere med at (vi) holder.

La oss også se på (vii). Anta (14) Pos(F)êw. Siden Th;S(Pos(F) <–> ¬Nec(¬F)) har man at (14) holder hvis og bare hvis (¬Nec(¬F))êw. Dette er ekvivalent med at ¬(Nec(¬)êw). I lys av (v) er dette i sin tur ekvivalent med:

¬(Aw')(wRw'& w'êW' –> (¬F)êw'). Ved hjelp av Teorem 4.2 ser man at dette sier det samme som (Ew')(w'êW' & wRw' & Fêw'). Dette viser at (vi) holder. **Q.E.D.**

Vi har latt "W'" betegne klassen av absolutt alle S-maksimalt konsistente mengder i L. Fra Teorem 4.3 fremgår det at R er en ekvivalensrelasjon over denne mengden. Dette innebærer at R inndeler W' i en familie av ikke-tomme, innbyrdes elementfremmede mengder som samlet uttømmer W'. La nå Δ være en vilkårlig S-konsistent mengde. Denne kan da, som man har sett, utvides til en maksimalt konsistent mengde Δ'. Siden Δ' er maksimalt konsistent vil Δ' være med i W' og dermed en av R-ekvivalens klassene i W'. La oss betegne denne R-ekvivalensklassen med "W;0". Når det gjelder W;0 vil derfor følgende sats gjelde:

Teorem 4.5 Anta W;0 er definert som angitt ovenfor. Anta F,G er vilkårlige formler i L og at wêW;0. Da gjelder de følgende påstander:

(i) Fêw &Gêw <–> (F&G)êw
(ii) (¬F)êw <–> ¬(Fêw)
(iii) (F–>G)êw <–> (Fêw –> Gêw)
(iv) (F<–>G)êw <–> (Fêw <–> Gêw)
(v) (F v G)êw <–> (Fêw v Gêw)
(vi) Nec(F)êw <–> (Aw')(w'êW;0 –> Fêw')
(vii) Pos(F)êw <–> (Ew')(w'êW;0 & fêw')

Bevis: Påstanden følger umiddelbart fra definisjonen av W;0 og Teorem 4.4. **Q.E.D.**

§5 Fullstendigheten til AX0

Vi skal nå tenke oss at den underliggende logikken S er AX0 og at vi tar vårt utgangspunkt i mengden av S-maksimalt konsistente mengder W;0 som ble nevnt i §4. Vi ønsker å konstruere hva vi her vil kalle en kanonisk modell for L.

Vi definerer først:

Definisjon 5.1 Anta F,G er formler i L. Da setter vi:

(i) Sm(F) = Mg(w: wêW;0 & Fêw)
(ii) S;c = Mg(Sm(F): FêFm(L))
(iii) E;c(w) = Mg(<Sm(F),Sm(G)>: F,GêFm(L) & LSi(F,G)êw)
(iv) [S;c,E;c(w)] = Mg(Mg(x: <x,y>êE;c(w)): yêS;c)
(v) Pr;w = Mg(<x,y>: x,yê[S;c,E;c(w)] &
(EF)(EG)(F,GêFm(L) & Si(F,G)êw &Sm(F)êx & Sm(G)êy))

På basis av disse definisjonene kan man bevise det følgende Lemma:

Lemma 5.2 Er wêW;0 gjelder:

(i) <x,y>êE;c(w) & <y,z>êE;c(w) –> <x,z>êE;c(w)
(ii) <x,y>êE;c(w) –> <y,x>êE;c(w)
(iii) xêS;c –> <x,x>êE;c(w)
(iv) (Ax)(xê[S;c,E;c(w)] –>x≠ø)
(v) (Ax)(Ay)(x,yê[S;c,E;c(w)] &x≠y –> xΩy=ø)
(vi) S;c = UN([S;c,E;c(w)])

Har man at D(Pr;w)≠ ø og at wêW;0 gjelder:

(vii) D(Pr;w) = [S;c,E;c(w)]
(viii) <x,y>êPr;w & <y,z>êPr;w –> <x,z>êPr;w
(ix) <x,y>êPr;w –> ¬<y,x>êPr;w
(x) (xêD(Pr;w) –> ¬<x,x>êPr;w)
(xi) x,yêD(Pr;w) –> <x,y>êPr;w v x=y v <y,x>êPr;w
(xii) xêS;c –> (E!y)(yêD(Pr;w)&xêy)

Bevis: Ad (i): Anta <x,y>êE;c(w) & <y,z>êE;c(w). Fra dette og definisjonen av E;c(w) følger eksistensen av formler F,G1,G2 og H slik at :

(1) x=Sm(F) & y = Sm(G1) & LSi(F,G1)êw
(2) y=Sm(G2) & z=Sm(H) & LSi(G2,H)êw. Fra (1) og (2) følger

Sm(G1)=Sm(G2). Fra dette kan man slutte ved hjelp av definisjonen av Sm at (Aw)(wêW;0 –> (G1êw <–>G2êw)). Siden w er maksimalt konsistent om wêW;0 kan man herav slutte: (Aw)(wêW;0 –> (G1<–>G2)êw). Fra dette og Lemma 4.5 i §4 følger: (3) Nec(G1 <–>G2)êw. Nå er det lett å vise at følgende er et teorem i AX0:

LSi(F,G1) & LSi(G2,H) & Nec(G1 <–> G2). –> LSi(F,H).

Siden w er maksimalt konsistent med hensyn på AX0 følger i lys av (1) – (3) at LSi(F,H)êw. Fra dette, (1) og (2) og definisjonen av E;c(w) følger så <x,z>êE;c(w).

Ad (ii): Anta <x,y>êE;c(w). Fra definisjonen av E;c(w) følger herav at det må finnes formler F,GêFm(L) der man har:

(1) x=Sm(F) & y = Sm(G) & LSi(F,G)êw. Nå er LSi(F,G) –>LSi(G,F) et aksiom i AX0 og derfor med i enhver mengde med formler i L som er maksimalt konsistent med hensyn på AX0. Fra dette og (1) følger LSi(G,F)êw. Dette definisjonen av E;c(w) og de to første konjunktene i (1) impliserer at <y,x>êE;c(w).

Ad (iii): Anta xêS;c. I lys av Definisjon 5.1 følger da at det finnes FêFm(L) der vi har (1) x=Sm(F). Nå er LSi(F,F) et aksiom i L og derfor med i enhver maksimalt konsistent mengde. Det følger at: (2) LSi(F,F)êw. Fra dette, (1) og definisjonen av E;c(w) følger <x,x>êE;c(w).

Ad (iv): Anta xê[S;c,E;c(w)] for vilkårlig x. Ved hjelp av Definisjon 5.1 følger da at x= Mg(z: <z,y>êE;c(w)) for noe yêS;c. Men fra dette siste følger ved hjelp av foregående punkt at <y,y>êE:c(w) og derfor at yêx=Mg(z: <z,y>êE;c(w)). Det følger at x≠ø.

Ad (v): Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x,y der man har:

(1) x,yê[S;c,E;c(w)] &x≠y & xΩy≠ø. Fra den første konjunkten følger ved hjelp av Definisjon 5.1 at det finnes a,bêS;c der

(2) x=Mg(z: <z.a>êE;c(w))
(3) y= Mg(z: <z,b>êE;c(w))

Fra den tredje konjunkten følger at det finnes c der cêx og cêy. Fra dette, (2) og (3) har man at <c,a>êE;c(w) & <c,b>êE;c(w). Herav har man siden E;c(w) er transitiv og symmetrisk at (4) <a,b>êE;c. Anta nå at z er et vilkårlig element i x. Da <z,a>êE;c(w) og da i lys av (4) at <z,b>êE;c(w). Det følger at zêy. Derfor x Inkl y. Man viser likeledes at y Inkl x. Det følger at x=y. Dette strider åpenbart mot (1). Det kan derfor ikke finnes x,y slik at (1) holder.

Ad(vi): Inklusjonen mot venstre: Anta xêUN([S;c,E;c(w)]) for vilkårlig x. Da finnes y slik at xêy & yê[S;c,E;c(w)]. I lys av Definisjon 5.1 innebærer den siste konjunkten at det finnes zêS;c slik at y=Mg(s: <s,z>êE;c(w)). Man har derfor at <x,z>êE;c(w) for noe zêS;c. Men herav følger eksistensen av formler F,GêFm(L) slik at x=Sm(F) & z=Sm(G). I lys av Definisjon 5.1 følger da xêS;c. Inklusjonen mot høyre: Anta xêS;c for vilkårlig x. Da har vi i lys av det som ble bevist under punkt (iii) at <x,x>êE;c(w). Det følger at xêy=Mg(z: <z,x>êE;c(w))ê[S;c,E;c(w)]. Herav følger xêUN([S;c,E;c(w)])

Ad (vii): Anta xêD(Pr;w). Da har man enten at det finnes z slik at <x,z>êPr;w eller at det finnes z slik at <z,x>êPr;w. I begge tilfelle har man i lys av definisjonen av Pr;w at xê[S;c,E;c(w)]. Dette viser at inklusjonen mot høyre holder. La oss så bevise at inklusjonen mot venstre holder. Anta for vilkårlig x at (1) xê[S;c,E;c(w)]. Siden D(Pr;w)≠ø finnes det noe y slik at yêD(Pr;w) og derfor noe z slik at man enten har <y,z>êPr;w eller <z,y>êPr;w.

Tilfelle (i): <y,z>êPr;w. Fra definisjonene av Pr;w følger da at y,zê[S;c,E;c(w)] og at det finnes F,GêFm(L) slik at (2) Si(F,G)êw &Sm(F)êy & Sm(G)êz). Fra (1) følger x=Mg(z: <z,s>êE;c(w)) der sêS;c. Vi har da <s,s>êE;c(w) og derfor (3) sêx. Siden sêS;c følger også at det må finnes H slik at (4) s=Sm(H). Nå har man at

(5) Si(G,H)êw v LSi(G,H)êw v Si(H,G)êw.

I det første og andre tilfellet har man ved hjelp av (2) at Si(F,H)êw. Fra dette, (1) (2), (3) og (4) følger ved hjelp av definisjonen av Pr;w at <y,x>êPr;w siden yê[S;c,E;c(w)]. Herav følger at xêD(Pr;w). I tilfelle Si(H,G)êw har man også i lys av (1),(2), (3), (4), definisjonen av Pr;w og det at zê[S;c,E;c(w)] at <x,z>êPr;w og derfor at xêD(Pr;w). Dette viser at satsen holder i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): <z,y>êPr;w. Man går i dette tilfellet frem på samme måten som i det foregående tilfelle. Vi overlater detaljene til leseren.

Ad (viii): Anta <x,y>êPr;w & <y,z>êPr;w. Fra definisjonen av Pr;w følger da eksistensen av formler F,G1êFm(L) og G2,HêFm(L) slik at:

(1) x,yê[S;c,E;c(w)] & Si(F,G1)êw &Sm(F)êx & Sm(G1)êy

(2) y,zê[S;c,E;c(w)] & Si(G2,H)êw &Sm(G2)êy & Sm(H)êz. Siden yêS;c,E;c(w)] følger det at det finnes sêS;c slik at y=Mg(z: <z,s>êE;c(w)). Fra dette, (1) og (2) følger <Sm(G1),s>êE;c(w) & <Sm(G2),s>êE;c(w). Herav følger <Sm(G1),Sm(G2)>êE;c(w). Det følger da videre at LSi(G1,G2)êw. Fra dette, (1) og (2) følger så:

(3) x,zê[S;c,E;c(w)] & Si(F,H)êw &Sm(F)êx & Sm(H)êz. I lys av definisjonen av Pr;w har man da <x,z>êPr;w.

Ad (ix): Anta for reduktio ad absurdum at <x,y>êPr;w &<y,x>êPr;w. Fra definisjonen av Pr;w følger eksistensen av F1,G1êFm(L) og F2,G2êFm(L) slik at:

(1) x,yê[S;c,E;c(w)] & Si(F1,G1)êw &Sm(F1)êx & Sm(G1)êy

(2) x,yê[S;c,E;c(w)] & Si(G2,F2)êw &Sm(G2)êy &Sm(F2)êx

Siden xê[S;c,E;c(w)] og Sm(F1),Sm(F2)êx følger LSi(F1,F2)êw. På lignende vis oppnår man: LSi(G1,G2). Men fra disse to forholdene samt (1) og (2) følger Si(F1,F1)êw som er umulig siden Si(F1,F1) er et aksiom i AX0.

Ad(x): Anta for reduktio ad absurdum at xêD(Pr;w) &<x,x>êPr;w. Fra den siste konjunkten og definisjonen av Pr;w følger det at det finnes F,GêFm(L) slik at: xê[S;c,E;c(w)] & Si(F,G)êw &Sm(F)êx & Sm(G)êx. Men fra dette følger LSi(F,G)êw og derfor at Si(F,F)êw. Dette siste er umulig.

Ad (xi): Anta x,yêD(Pr;w). Da har man i lys av (vii) at (1) x,yê[S;c,E;c(w)]. Det følger da at det finnes formler F,GêFm(L) slik at (2) Sm(F)êx & Sm(G)êy. Vi har (Si(F,G) v LSi(F,G)v Si(G,F))êw. Det følger siden w er en maksimalt konsistent mengde at Si(F,G)êw v LSi(F,G)êw v Si(G,F)êw. I det første tilfelle har vi i lys av definisjonen av Pr;w,

samt (1) og (2), at <x,y>êPr;w. I det andre tilfelle følger x=y, siden Sm(F) og Sm(G) i dette tilfelle må høre med til den samme E;c(w)-ekvivalensklassen. I det siste tilfelle har vi fra (1), (2) og definisjonen av Pr;w, at <y,x>êPr;w. Satsen holder altså i alle tilfelle.

Ad (xii): Anta xêS;c. I lys av (vi) har man da at det finnes y slik at xêy & yê[S;c,E;c(w)]. I lys av (v) kan det ikke finnes z der zê[S;c,E;c(w)] &xêz. Man har derfor at (E!y)(yê[S;c,E;c(w)]&xêy). Siden D(Pr;w) = [S;c,E;c(w)] i følge (vii) når D(Pr;w)≠ø følger (E!y)(yêD(Pr;w)&xêy). **Q.E.D.**

Siden klassen av formler i L er tellbart uendelig følger det at S;c i høyden er tellbart uendelig. Det følger videre at kvotientmengden til E;c(w) med hensyn på S;c også i høyden er tellbart uendelig og derfor at D(Pr;w) er høyden tellbart uendelig for hver wêW;0. I det følgende lar vi c være et helt fiksert objekt i Reell. I lys av Teorem 3.1 følger det derfor ved hjelp av utvalgsaksiomet at det finnes en funksjon H hvor domenet til H er Mg(w: wêW;0 & D(Pr;w)≠ø) og hvor man for hver wêDom(H) har:

(i) H(w) : D(Pr;w) –> Reell
(ii) (Ax)(Ay)(x,yêD(Pr;w) –> (<x,y>êPr;w <–> H(w)‘x > H(w)‘y))
(iii) (Ax)(xêD(Pr;w) –> H(w)‘x ê(c–2, c+2))

Vi definerer nå en funksjon *f* som for hver wêW;0 er en verdiskala over Pt(W;0) ved å sette:

Definisjon 5.3 Funksjonen *f*ê ((Reell)^Pt(W;0))^W;0 er definert ved:

f(w) = Mg(<x,0>: xêPt(W,0)) om D(Pr;w)=ø

Er D(Pr;w)≠ø setter vi:

f(w)(x) = H(w)((iy)(yêD(Pr;w) &xêy)) om xêS;c
f(w)(x) = 0 om xê(Pt(W;0) – S;c)

Det skulle neppe være noen vanskeligheter med å innse at *f*(w) definert på den måten er en verdiskala over Pt(W;0) for alle wêW;0. Dette innebærer at S=<W;0,<*f*(w)>/wêW;0/) er en modellstruktur.

Vi kan nå definere den "kanoniske" modellen vi har har i tankene. La V være en L-valuasjon som er definert slik: V(p) = Mg(w: wêW;0 & pêw). Da kan vi la den kanoniske modellen være strukturen:

M'= <W;0, <*f*(w)>/wêW;0/,V> . Man ser lett at denne oppfyller kravene til en AX0-modell.

Vi skal nå vise:

Lemma 5.4 Anta M'= <W;0, <*f*(w)>/wêW;0/,V> er den kanoniske modellen for L . Anta videre at F,GêFm(L). Da har man at for wêW;0:

(i) *f*(w)(Sm(F))>*f*(w)(Sm(G)) <–> Si(F,G)êw
(ii) *f*(w)(Sm(F)) = *f*(w)(Sm(G)) <–> LSi(F,G)êw

Bevis: Ad (i): Vi gir først et bevis for kondisjonalen mot høyre. Anta (1) *f*(w)(Sm(F))>*f*(w)(Sm(G)). I lys av definisjonen av funksjonen *f* er det rimelig å sondre mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): D(Pr;w)=ø. I så fall har man ved hjelp av Definisjon 5.3 at (2) *f*(w)=Mg(<x,0>:xêPt(W;0). Siden F,GêFm(L) har man klart nok at Sm(F),Sm(G)êPt(W;0). Det følger fra dette og (2) at f(w)(Sm(G))=0=f(w)(Sm(G)). Men dette strider åpenbart mot (1). Dette tilfelle er derfor utelukket.

Tilfelle (ii): D(Pr;w)≠ø. Siden F,GêFm(L) og Sm(F)=Mg(w: wêW;0 &Fêw) og

Sm(G)= Mg(w: wêW;0 & Gêw) har vi at det finnes x,y slik at (3) x,yêPt(W;0) og (4) x=Sm(F) & y= Sm(G). Det følger ved hjelp av Definisjon 5.1 at (5) x,yêS;c. Fra dette og Definisjon 5.3 følger:

(6) f(w)(Sm(F)) = f(x) = H(w)((iz)(zêD(Pr;w)&xêz))

(7) f(w)(Sm(G)) = f(y) = H(w)((iz)(zêD(Pr;w)&yêz))

Fra (5) og Lemma 5.2 følger det at det finnes a,b slik at:

(8) a= (iz)(zêD(Pr;w)&xêz) & b= (iz)(zêD(Pr;w)&yêz). Fra (8) følger at (9) a,bêD(Pr;w)& xêa & yêb. Fra (1), (4), (8), (9) og det at

(10) (Ax)(Ay)(x,yêD(Pr;w) –> (<x,y>êPr;w <–> H(w)‘x > H(w)‘y))

følger at <a,b>êPr;w. Fra dette og definisjonen av Pr;w kan man slutte at det finnes F1,G1 der man har:

(11) a,bê[S;c,E;c(w)]

(12) F1,G1êFm(L) & Si(F1,G1)êw &Sm(F1)êa & Sm(G1)êb. Fra (4), (9) og (12) har man at Sm(F),Sm(F1)êa og Sm(G),Sm(G1)êb. I lys av (11) kan man fra dette slutte at LSi(F,F1)êw & LSi(G,G1)êw. Siden Si(F1,G1)êw følger da, siden w er en maksimalt AX0-konsistent mengde og den følgende formel er et teorem i AX0:

LSi(F,F1) & LSi(G,G1) & Si(F1,G1) –> Si(F,G)

at Si(F,G)êw. Dermed har vi bevist kondisjonalen mot høyre.

La oss så gi et bevis for kondisjonalen mot venstre i (i). Anta Si(F,G)êw. Sett x1=Sm(F) & y1=Sm(G). Det følger da ved hjelp av definisjonen av S;c at x1,y1êS;c. Ved hjelp av Lemma 5.2 følger det også at det finnes a1,b1 der:

a1= (iz)(zêD(Pr;w) &x1êz)

b1= (iz)(zêD(Pr;w) &y1êz). Da har man a1,b1ê[S;c,E;c(w)]. Fra alt dette og definisjonen av Pr;w følger (13) <a1,b1>êPr;w. Men fra dette og det at

(Ax)(Ay)(x,yêD(Pr;w) –> (<x,y>êPr;w <–> H(w)‘x > H(w)‘y))

følger H(w)‘a1>H(w)‘b1. Men ved hjelp av Definisjon 5.3 kan man da slutte: f(w)(Sm(F)>f(Sm(G)). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (i).

Ad (ii): Anta (1) F,GêFm(L) og at (2) f(w)(Sm(F)) = f(w)(Sm(G)). Vi skiller mellom to tilfelle alt ettersom D(Pr;w)=ø eller D(Pr;w)≠ø.

Tilfelle (i): D(Pr:w)=ø. Anta mot formodning at [S;c,E;c(w)] inneholder mer enn et element. Da finnes x,yê[S;c,E;c(w)] der x≠y. I lys av Lemma 5.2 har vi da at x≠ø og y≠ø. Dette innebærer at det finnes a,b slik at aêx og bêy. I lys av definisjonen av [S;c,E;c(w)] har vi at det finnes x1,y1êS;c slik at

x=Mg(z: <z,x1>êE;c(w)) & y= Mg(z: <z,y1>êE;c(w)). Fra dette og definisjonen av E;c(w) følger det at det finnes formler F,F1 og G,G1 slik at

a=Sm(F) & x1=Sm(F1) & LSi(F,F1)êw

b=Sm(G) & y1=Sm(G1) & LSi(G,G1)êw. Siden x≠y kan ikke x og y ha noen felles elementer. Dette impliserer at ¬(LSi(F1,G1)êw). Herav følger, siden w er en maksimalt konsistent mengde at (¬LSi(F1,G1))êw. Siden

Si(F1,G1)v LSi(F1,G1) v Si(G1,F1) er et aksiom i AX0 følger at vi enten må ha Si(F1,G1)êw eller Si(G1,F1)êw. I det første tilfellet har vi i lys av definisjonen av Pr;w at <x1,y1>êPr;w. Men da er D(Pr;w)≠ø som er umulig. I det andre tilfellet har vi at <y1,x1>êPr;w noe som igjen impliserer at D(Pr;w)≠ø. Det følger at det bare kan finnes et element i [S;c,E;c(w)]. Nå har man at Sm(F),Sm(G)êS;c. Vi må derfor ha at <Sm(F),Sm(G)>êE;c(w). Men dette impliserer at <Sm(F),Sm(G)>= <Sm(F'),Sm(G')> for visse F',G'êFm(L) der LSi(F',G')êw. Men da har vi Sm(G)=Sm(G') & Sm(F)=Sm(F'). Det følger at Nec(F<–>F')êw & Nec(G<–>G')êw. Men da må man ha LSi(F.G)êw som er det vi ønsker.

Tilfelle (ii): Anta på den annen side at D(Pr;w)≠ø. Siden Sm(F), Sm(G)êS;c følger da at:

f(w)(Sm(F)) = H(w)((iy)(yêD(Pr;w) &Sm(F)êy))

f(w)(Sm(G)) = H(w)((iy)(yêD(Pr;w) &Sm(G)êy)) Ved hjelp av Lemma 5.2 har man da at det finnes a,b slik at: a=(iy)(yêD(Pr;w) &Sm(F)êy) og b=(iy)(yêD(Pr;w) &Sm(G)êy). Det følger at a,bêD(Pr;w) og derfor at a,bêDom(H(w)). Har man nå <a,b>êPr;w følger at H(w)‘a>H(w)‘b og derfor at f(w)(Sm(F))>f(Sm(G)). Dette er umulig. Tilsvarende om <b,a>êPr;w. Det følger at a=b og derfor at Sm(F),Sm(G)êaê[S;c,E;c(w)]. Men herav har man LSi(F,G)êw.
Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (ii) holder.

La oss også vise at kondisjonalen mot venstre i (ii) holder. Anta LSi(F,G)êw. Er da D(Pr;w)=ø har vi i lys av definisjonen av f, siden Sm(F),Sm(G)êPt(W;0), at f(w)(Sm(F)) = f(w)(Sm(G)). Er på den annen side D(Pr;w)≠ø følger det ved hjelp av Lemma 5.2 at det finnes a og b slik at

(+) a=(iy)(yêD(Pr;w) &Sm(F)êy) & b = (iy)(yêD(Pr;w) &Sm(G)êy). I dette tilfelle har vi også ved hjelp av Lemma 5.2 at D(Pr;w) = [S;c,E;c(w)]. Vi har derfor at Sm(F)êaê[S;c,E;c(w)] og Sm(G)êbê[S;c,E;c(w)]. Men LSi(F,G)êw. Herav følger <Sm(F),SM(G)>êE;c(w) og derfor a=b. I lys av konstruksjonen av H har vi da at H(w)(a)=H(w)(b). Fra dette, (+) og definisjonen av f følger så

f(w)(Sm(F)) = f(w)(Sm(G)). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Lemma 5.4. **Q.E.D.**

Vi kan nå formulere og bevise vårt hovedresultat:

Teorem 5.5 Anta M'= <W;0, <f(w)>/wêW;0/,V> er den kanoniske modellen for L. Da gjelder for alle FêFm(L) og wêW;0:

True(F,w,M',L) <–> Fêw

Bevis: Dette bevises ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av F. Når det gjelder induksjonstrinnene for Si og LSi må man benytte Lemma 5.4 **Q.E.D.**

På basis av Teorem 5.5 kan vi nå bevise selve hovedresultatet i dette notatet, nemlig at det preferanselogiske systemet AX0 er fullstendig. Man har:

Teorem 5.6 (i) FêFm(L) –> (Val;AX0(F) –> Th(AX0, F))

(ii) FêFm(L) –> (Val;AX0(F) <–> Th(AX0, F))

Bevis: (ii) følger umiddelbart fra (i) sammen med Teorem 2.7 i §2. Det er derfor tilstrekkelig å bevise (i): Anta F er en formel i L og at ¬Th(AX0,F). Da har man at ¬Th(AX0,¬¬F). Dette innebærer at ¬F er konsistent med hensyn på AX0 og at {¬F} derfor er en AX0-konsistent mengde. I lys av Lindenbaums teorem kan denne utvides til en maksimalt konsistent mengde w;0. Vi betrakter nå klassen av alle maksimalt konsistente mengder og kaller denne W. Vi definerer så relasjonen R over W som beskrevet i §4. Denne inndeler W i innbyrdes disjunkte ekvivalensklasser. Vi lar så W;0 være den av disse ekvivalensklassene hvor w;0 er med. Vi konstruerer så den kanoniske modellen:

M'=<W;0, <f(w)>/wêW;0/,V>

slik som beskrevet ovenfor. I lys av Teorem 5.5 har vi da for alle FêFm(L):

(1) True(F,w;0,M',L) <–> Fêw;0

Men siden (¬F)ê{¬F} Inkl w;0 følger ved hjelp av (1) at ¬True(F,w;0,M',L). Det finnes med

andre ord en L-modell M hvor F er usann i en eller annen verden i denne modellen. Det følger at ¬Val;AX0(F). Dette viser at (i) holder. **Q.E.D.**

——•••---